МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Кафедра «Програмна інженерія та інформаційні технології управління»

Індивідуальне домашнє завдання

З дисципліни «Дослідження операцій»

Варіант №18

Виконав:

студент гр. КН-36а

Рубан Ю. Д.

Перевірив:

Лисицький В. Л.

Харків – 2018

Задача о дешевой диете.

*(1)*

Оперирующая сторона: столовая для рабочих в цехе.

Цель: закупка продуктов питания для обеспечения питательными веществами бригады, состоящей из 10 человек в течении рабочей недели.

Вектор Х представляет собой определенный набор продуктов питания:

Вектор С представляет собой цену за определенный продукт питания:

Вектор В представляет собой количество питательных веществ которые должен получить рабочий за один прием пищи:

Матрица А представляет собой количество питательных веществ получаемых за прием i – ого продукта питания:

Элементы , что исключает возможности собственного производства продуктов питания.

Качественная постановка задачи:

Определить в каком количестве производить закупку продуктов питания для столовой заводского цеха, чтобы при минимальных затратах ресурсов все 10 работников за прием пищи получали требуемое количество белков и жиров ежедневно в течении 5-ти рабочих дней.

Количественная постановка:

Основная задача исследования операций состоит в определении вектора , , который удовлетворяет ограничениям , и значение целевой функции L\*() будет минимальным.

**Функциональная схема операции**

Рынок продуктов питания

Оперирующая сторона

Организм рабочего

Пункт питания

b2=10

b1=14

Финансы: L

C2=7

C3=1

C4=1

C5=2

C6=4

C1=9

Записать данную задачу в канонической форме. Выписать для задачи в канонической форме матрицу условий, вектора условий, вектор ограничений и вектор коэффициентов линейной формы.

Решение

Запись задачи линейного программирования в канонической форме будет выглядеть следующим образом:

Матрица условий будет выглядеть следующим образом:

Вектор ограничений: 𝑏⃗= [14,10].

Вектор коэффициентов линейной формы: 𝑐⃗= [].

Вектор переменных: 𝑥⃗= [𝑥1, 𝑥2, 𝑥3, 𝑥4, 𝑥5, 𝑥6].

Вектора условий:

, , , ,,

Используя геометрическую интерпретацию решить задачу линейного программирования, двойственную к задаче линейного программирования индивидуального домашнего задания, записанную в канонической форме.

Решение

Вектор переменных двойственной задачи: 𝑦⃗= [𝑦1, 𝑦2].

Целевая функция двойственной задачи:

𝐿̃=14𝑦1+10𝑦2→𝑚𝑖𝑛.

𝐴T∗𝑦⃗= ≥

4𝑦1 + 3𝑦2 ≥ –9 П1: 4𝑦1 + 3𝑦2 = –9

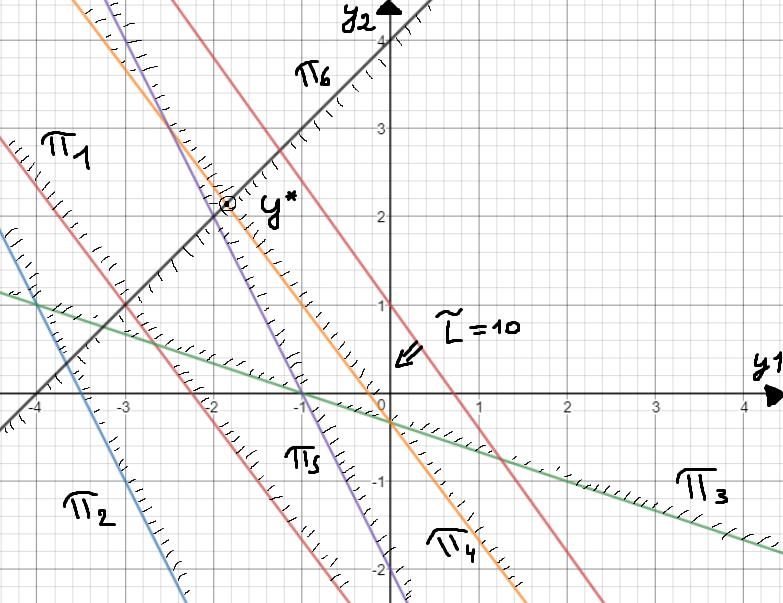
2𝑦1 + 𝑦2 ≥ –7 П2: 2𝑦1 + 𝑦2 = –7

𝑦1 + 3𝑦2 ≥ –1 П3: 𝑦1 + 3𝑦2 = –1

4𝑦1 + 3𝑦2 ≥ –1 П4: 4𝑦1 + 3𝑦2 = –1

2𝑦1 + 𝑦2 ≥ –2 П5: 2𝑦1 + 𝑦2 = –2

𝑦1 – 𝑦2 ≥ –4 П6: 𝑦1 – 𝑦2 = –4



Найдем координаты точки y\* на пересечении П4 и П6:

y\* = ()

= =

На основании первой теоремы теории двойственности: =

Решить задачу линейного программирования на основе теоремы о существовании опорного решения.

Решение

Проверим, имеет ли исходная задача решение. Для этого необходимо показать, что множества планов прямой и двойственной задач не пустые.

Для прямой задачи модно указать =(3, 1, 0, 0, 0 , 0).

Составим двойственную задачу. Так как исходная задача записана в канонической форме, то двойственная будет выглядеть следующим образом:

𝐿̃=14𝑦1+10𝑦2→𝑚𝑖𝑛

4𝑦1 + 3𝑦2 ≥ –9

2𝑦1 + 𝑦2 ≥ –7

𝑦1 + 3𝑦2 ≥ –1

4𝑦1 + 3𝑦2 ≥ –1

2𝑦1 + 𝑦2 ≥ –2

𝑦1 – 𝑦2 ≥ –4

Покажем, что множество планов двойственной задачи не пусто, для этого достаточно указать любой план задачи, например =(0,0).

Следовательно, исходная задача имеет решение.

Построим множество допустимых вершин. Для этого вначале составим системы линейно независимых векторов из векторов условий.

Выпишем векторы условий:

, , , ,,

Запишем возможные базисы:

.

Проверим линейную независимость векторов, входящих в базисы, для этого достаточно вычислить соответствующие определители:

Векторы условий и , входящие в базис и векторы и , входящие в базис линейно зависимые.

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора не соблюдены (), следовательно, не является планом задачи.

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину =

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора не соблюдены (), следовательно, не является планом задачи.

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора не соблюдены (), следовательно, не является планом задачи.

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину .

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия неотрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора соблюдены, следовательно, получаем вершину

Для базиса запишем опорный план Подставим его в ограничения задачи:

Решая систему, получаем . Условия не отрицательности компонент вектора не соблюдены (), следовательно, не является планом задачи.

Множество вершин допустимой области решений рассматриваемой задачи

X= {. Выберем вершину, соответствующую оптимальному решению, на основе максимального значения целевой функции.

Множество допустимых вершин содержит девять элементов, соответственно вычисли целевую функцию:

Максимальное значение целевой функции = , оптимальный вектор -

Ответ: L\*= ( , , ={}.

Решить задачу линейного программирования заданной в канонической форме с помощью 1-го алгоритма методом последовательного улучшения плана, если задан начальный базис

Решение

Итерация 1.

Заполним исходную таблицу, соответствующему начальному базису

Для этого вычислим матрицу , обратную матрице . Она имеет элементы . По формуле находим матрицу коэффициентов разложений векторов условий и вектора ограничений по базису и записываем ее в таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | C | –9 | –7 | –1 | –1 | –2 | –4 |  |
| № | Cs | Fs | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |  |
| 1 | –1 |  | 6 |  |  | 1 |  |  | 0 |  |
| 2 | –4 |  | 8 |  |  | 0 |  |  | 1 |  |
| 3 |  |  | –38 |  |  | 0 |  |  | 0 |  |

Где zj = cs1\*x1,j + cs2\*x2,j

Параметры определяются по следующей формуле

Проанализируем ситуацию.

В результате анализа установлена ситуация 3. Определим направляющий столбец . В качестве направляющего выберем такой столбец, где , . Где

Определим направляющий столбец

, ,

,

Номер направляющего столбца k = 4.

Определим направляющую строку.

Следовательно, номер направляющей строки r = 1

Исключим из базиса вектор в направляющей строке r = 1 столбца Fs и заменим его на вектор, находящийся в направляющем столбце k = 5. Новый опорный план имеет базис .

Сделаем пересчет таблицы в соответствии с новым опорным планом.

Пересчитаем

Итерация 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | C | –9 | –7 | –1 | –1 | –2 | –4 |
| № | Cs | Fs | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| 1 | –1 |  |  |  |  |  | 1 |  |  |
| 2 | –4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 |

Проанализируем ситуацию

Все неотрицательны, следовательно, имеет место ситуация 1. Оптимальное решение найдено.

Оптимальный базис , оптимальный план значение целевой функции

Решить задачу линейного программирования заданной в канонической форме с помощью 2-го алгоритма методом последовательного улучшения плана, если задан начальный базис

Решение

Вспомогательная таблица

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 4 | 3 | 1 | -1 | 1 | 5 |
| 4 | 5 | 1 | 1 | -1 | 3 |
|  | 6 | 1 | 4 | -5 | -3 |
|  | 0 |  | 1 | 0 | -1 |
|  | 0 |  |  |  | 0 |
|  | 5 | 0 | 3 | -2 | 0 |
|  | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 |

В методе обратной матрицы для нахождения оптимального решения осуществляется частичный перебор опорных планов прямой задачи. Требуется чтобы исходная задача была представлена в канонической форме и был известен начальный базис опорного плана.

Итерация 1.

Для заполнения основной таблицы вычислим, обратную :

.

Рассчитаем базисные компоненты опорного плана:

.

Определим параметры

С учетом выполненных вычислений основная таблица для итерации 1 представлена ниже.

Проанализируем ситуацию. Вычислим:

*.*

Основная таблица для итерации 1 имеет следующий вид.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 6 |  | 1 | 1/8 | 1/8 | 1 | 1 |
| 2 | -5 |  | 1 | 5/8 | -3/8 | 2 | 1/2 |
| 3 |  |  | 1 | -19/8 | 21/8 | -1 |  |

Столбец включает векторы условий, образующих базис .

В столбце находятся коэффициенты целевой функции, соответствующие номерам векторов условий из столбца

В столбцах расположены элементы обратной матрицы.

Значения базисных компонент опорного плана записываются в столбец .

В 3-ю строку заносятся параметры

В 3-й строке параметра записывается значение целевой функции на текущем опорном плане, т. е. L(.

Определяем направляющий столбец:

При приближенном методе номер направляющего столбца определяется номером наименьшего из отрицательных параметров , которые находятся в последней заполненной строке вспомогательной таблицы.

Наименьшая отрицательная величина достигается при j=5:

После этого определяется разложение *k*-го вектора условий по базисным векторам

.

Результат разложения записывается в столбец основной таблицы. В последнюю строку этого столбца переносится из вспомогательной таблицы значение на данной итерации.

Определим

.

Далее определяем направляющую строку *r*. Параметр рассчитывается по формуле: =.

Направляющей строкой будет строка *r*, в которой найдено значение .

Наблюдается ситуация 3. В базис вводится переменная . Из базиса исключается вектор

Следующим шагом является пересчет параметров новой таблицы.

Строится новая основная таблица. Новый базис опорного плана формируется выведением из предыдущего базиса вектора, находящегося в направляющей строке *r* столбца таблицы, и заменой его на вектор, находящийся в направляющем столбце *k*. Соответственно в столбце новой основной таблицы заменяется на . Параметры новой и старой основных таблиц метода обратной матрицы связаны между собой формулами:

, .

Пересчитаем компоненты главной таблицы:

Пересчитаем :

= (6 -3).

Итерация 2.

Основная таблица для итерации 2 имеет следующий вид.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 6 |  | 1/2 | -3/16 | 5/16 | 1/8 | 4 |
| 2 | -3 |  | 1/2 | 5/16 | -3/16 | 1/8 | 4 |
| 3 |  |  | 3/2 | -33/16 | 39/16 | -5/8 |  |

Проанализируем ситуацию. Вычислим:

*.*

Определяем направляющий столбец:

Наименьшая отрицательная величина достигается при j=2:

Определим

.

.

Наблюдается ситуация 3. В базис вводится переменная . Из базиса исключается вектор

Пересчитаем компоненты главной таблицы:

Пересчитаем :

= (1 -3).

Итерация 3.

Основная таблица для итерации 3 имеет следующий вид.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 |  | 4 | -3/2 | 5/2 | -4 | - |
| 2 | -3 |  | 0 | 1/2 | -1/2 | 1 | 0 |
| 3 |  |  | 4 | -3 | 4 | -2 |  |

Проанализируем ситуацию. Вычислим:

*.*

Определяем направляющий столбец:

Наименьшая отрицательная величина достигается при j=4:

Определим

.

.

Наблюдается ситуация 3. В базис вводится переменная . Из базиса исключается вектор

Пересчитаем компоненты главной таблицы:

Пересчитаем :

= (1 -5).

Итерация 4.

Основная таблица для итерации 4 имеет следующий вид.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 |  | 4 | 1/2 | 1/2 |
| 2 | -5 |  | 0 | 1/2 | -1/2 |
| 3 |  |  | 4 | -2 | 3 |

Проанализируем ситуацию. Вычислим:

*.*

Все неотрицательны, следовательно, имеет место ситуация 1. Оптимальное решение найдено.

Вспомогательная таблица содержит информацию об исходной задачи.

В строки с 1-й по 3-ю заносятся исходные данные задачи. Заполнение строк с 4-й и дальше происходит каждую итерацию на основании данных, полученных при заполнении основных таблиц метода обратной матрицы.

Оптимальный базис , оптимальный план значение целевой функции 4

Решить задачу линейного программирования заданной в канонической форме с помощью 2-го алгоритма методом последовательного улучшения плана, если задан начальный базис

Решение

Вспомогательная таблица

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 14 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 |
| 10 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | -1 |
|  | -9 | -7 | -1 | -1 | -2 | -4 |
|  | -7/4 | 5 | 0 | -39/4 | -15/4 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Итерация 1.

Для заполнения основной таблицы вычислим, обратную :

.

Рассчитаем базисные компоненты опорного плана:

.

Определим параметры

С учетом выполненных вычислений основная таблица для итерации 1 представлена ниже.

Проанализируем ситуацию. Вычислим:

*.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | -1 |  | 6 | 1/4 | 1/4 | 7/4 | 24/7 |
| 2 | -4 |  | 8 | 3/4 | -1/4 | 9/4 | 32/5 |
| 3 |  |  | -38 | -13/4 | 3/4 | -39/4 |  |

Наименьшая отрицательная величина при j = 4, следовательно k = 4

Наблюдается ситуация 3.

*,* Следовательно, r = 1

В базис включается переменная x4. Из базиса исключается переменная x3.

Пересчитаем компоненты главной таблицы:

Пересчитаем :

= (-1 -4).

Итерация 2.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N |  |  |  |  |  |
| 1 | -1 |  | 24/7 | 1/7 | 1/7 |
| 2 | -4 |  | 2/7 | 3/7 | -4/7 |
| 3 |  |  | -32/7 | -13/7 | 15/7 |

Проанализируем ситуацию. Вычислим:

*.*

Все неотрицательны, следовательно, имеет место ситуация 1. Оптимальное решение найдено.

Оптимальный базис , оптимальный план значение целевой функции

Решить задачу линейного программирования заданной в канонической форме с помощью 1-го алгоритма М-метода.

Решение

Построим М-задачу

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | С(М) |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |  |
|  |  |  |  | -9 | -7 | -1 | -1 | -2 | -4 | 0 | 0 |  |
| № |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | -1 | 0 |  | 14 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 |  |
| 2 | -1 | 0 |  | 10 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | -1 | 0 | 1 |  |
| 3 |  |  |  | -24 | -7 | -3 | -4 | -7 | -3 | 0 | 0 | 0 |  |
| 4 |  |  | 0 | 9 | 7 | 1 | 1 | 2 | 4 | 0 | 0 |  |

Ситуация 3.

Направляющий столбец k=1.

. Следовательно, направляющая строка r = 2. Из базиса выходит переменная и входит переменная . Пересчитаем таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | С(М) |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |  |
|  |  |  |  | -9 | -7 | -1 | -1 | -2 | -4 | 0 | 0 |  |
| № |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | -1 | 0 |  |  | 0 |  | -3 | 0 |  |  | 1 |  |  |
| 2 | 0 | -9 |  |  | 1 |  | 1 | 1 |  |  | 0 |  | – |
| 3 |  |  |  |  | 0 |  | 3 | 0 |  |  | 0 |  |  |
| 4 |  |  | 30 | 0 | -4 | -8 | -8 | -1 | 7 | 0 | -3 |  |

Проанализируем ситуацию

Направляющий столбец k=6, направляющая строка r = 1. Следовательно, из базиса исключается переменная и входит переменная . Пересчитаем таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | С(М) |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |  |
|  |  |  |  | -9 | -7 | -1 | -1 | -2 | -4 | 0 | 0 |  |
| № |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | -4 |  |  | 0 |  |  | 0 |  | 1 |  |  | – |
| 2 | 0 | -9 |  |  | 1 |  |  | 1 |  | 0 |  |  |  |
| 3 |  |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
| 4 |  |  |  | 0 | 2 | 1 | -8 |  | 0 |  | 1 |  |

Проанализируем ситуацию.

Направляющий столбец k = 4. Направляющая строка r = 2. Из базиса исключается переменная и заносится переменная Пересчитаем таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | С(М) |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |  |
|  |  |  |  | -9 | -7 | -1 | -1 | -2 | -4 | 0 | 0 |  |
| № |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | -4 |  |  | 0 |  |  | 0 |  | 1 |  |  |  |
| 2 | 0 | -1 |  |  | 1 |  |  | 1 |  | 0 |  |  |  |
| 3 |  |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
| 4 |  |  |  | 8 |  |  | 0 |  | 0 |  |  |  |

Все неотрицательны, следовательно, имеет место ситуация 1. Оптимальное решение найдено.

Оптимальный базис , оптимальный план значение целевой функции